分 类 号：O174.52　　　　密 级：

学校代码：10414　　　　学 号：2011010747

江西师范大学

硕士研究生学位论文

高阶线性微分方程解的辐角分布

The Angular Distribution of Solutions of Higher Order Linear Differential Equations

胡 军

院　　所：数信学院　　　　导师姓名：易才凤教授

学科专业：基础数学　　　　研究方向：复分析

二〇一四 年 五月

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果.据我所知,除了文中特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果,也不包含为获得或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料.与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意.

学位论文作者签名:　　　　　　签字日期:　　年　月　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解江西师范大学研究生院有关保留、使用学位论文的规定,有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘,允许论文被查阅和借阅.本人授权江西师范大学研究生院可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文.

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名:　　　　　　导师签名:

签字日期:　　年　月　日　　　签字日期:　　年　月　日

摘 要

本文运用 Nevanlinna 基本理论和 Wiman-Valiron 理论, 研究了高阶线性微分方程解的振荡性质, 全文分为以下四章.

第一章, 作为全文的预备知识, 简要介绍了 Nevanlinna 理论的相关内容.

第二章, 主要研究了整系数高阶非齐次线性微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F$ 的无穷级解沿径向上的振荡性质. 在假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 和 F 为有限级整函数,且方程的超越解 f 满足 $\sigma_2(f)=\rho(0<\rho<\infty)$的条件下, 以角域上的 Nevanlinna 特征函数为主要工具证明了解 f 沿径向上的超级, *Borel* 方向上的超级和超级零点收敛指数之间的一种等价关系.

第三章, 假设 f 为整系数高阶微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\ldots+A_1f'+A_0f=F$ 的无穷级解,满足 $\sigma_2(f)<\infty$, 且 $\rho(r)$是 f 的一个无限级. 利用熊庆来的无限级型函数和庄圻泰的关于无限级 Borel 方向的一个等价条件, 证明了射线 L: $\arg z=\theta$ 是解 f 的一条 $\rho(r)$级 Borel 方向的一个充要条件.

第四章, 本章主要运用复平面上 Nevanlinna 理论, Wiman-Valiron 理论及整函数的相关理论, 研究了二阶亚纯系数微分方程 $f''+h(z)e^{P(z)}f'+Q(z)f=0$ 超越解的增长性,通过给定适当条件,对方程解的增长级及超级进行了估计.

关键词：微分方程；亚纯函数；Borel 方向；超级；零点收敛指数；亏值

Abstract

This paper, based on the Nevanlinna fundamental theory and Wiman-Valiron theory, investigates the radial oscillation of infinite order solutions of higher order linear differential equation. The whole paper can be divided into the following four chapters.

Chapter one, as the pre-knowledge of the whole paper, briefly introduces the relevant knowledge of Nevanlinna theory.

Chapter two mainly investigates the radial oscillation of infinite order solutions of higher order nonhomogeneous linear differential equation $f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' = F$ .In the condition that $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$, F with finite order and the transcendental solutions f satisfy $\sigma_2(f) = \rho(0 < \rho < \infty)$,then we can obtained an equivalent relationship between the estimations on the hyper order along radial direction of f , the hyper order and the hyper order convergence exponent of the sequence of zero of f along it's Borel direction of hyper order,by using Nevanlinna theory in angular domain .

Chapter three suppose that the infinity order solution f of $f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' = F$ satisfy $\sigma_2(f) < \infty$ and F with finite order, $\rho(z)$ is the infinity order type function of Xiong Qinglai's of f .Then obtain a sufficient and necessary condition for L: $\arg z = \theta$ is a order Borel direction of f by using the infinity order type function of Xiong Qinglai's and a sufficient and necessary condition for infinity order Borel direction which was established by Chuang Chitai.

Chapter four studies the growth of transcendental solutions of the second order linear differential equation $f'' + h(z)e^{P(z)}f' + Q(z)f = 0$ with meromorphic coefficients and estimates the order and hyper order of the by specifying appropriate prerequisites by using Nevanlinna theory, Wiman-waliron theory.

Key words: Differential equations; Hyper order;Borel direction;meromorphic function;
The exponent of convergence of zero-sequence;Deficient value;

目　录

中文摘要…………………………………………………………………… I
英文摘要……………………………………………………………………II
目录…………………………………………………………………………III
第一章 引言与预备知识 ……………………………………………………1
1.1 引言…………………………………………………………………1
1.2 预备知识及相关定义………………………………………………1
1.2.1 复平面内的 Nevanlinna 特征与增长级 ……………………………2
1.2.2 角域内的 Nevanlinna 特征及增长级 ………………………………4
第二章 高阶非齐次线性微分方程解的径向振荡 …………………………6
2.1 引言与结果…………………………………………………………6
2.2 引理 …………………………………………………………………8
2.3 定理的证明 …………………………………………………………11
2.3.1 定理 2.1.1 的证明 ……………………………………………11
2.3.2 定理 2.1.2 的证明 ……………………………………………14
2.3.3 定理 2.1.3 的证明 ……………………………………………14
第三章 复振荡中的辐角分布………………………………………………15
3.1 引言与结果…………………………………………………………15
3.2 引理…………………………………………………………………16
3.3 定理的证明 …………………………………………………………20
3.3.1 定理 3.1.1 的证明 ……………………………………………20
3.3.2 定理 3.1.2 的证明 ……………………………………………21
3.3.3 定理 3.1.3 的证明 ……………………………………………21
第四章 一类亚纯系数二阶微分方程解的超级……………………………22
4.1 引言与结果…………………………………………………………22
4.2 引理…………………………………………………………………22
4.3 定理的证明 …………………………………………………………24
参考文献……………………………………………………………………26
致谢…………………………………………………………………………29
在校期间公开发表论文及著作情况………………………………………30

第一章 引言与预备知识

1.1 引言

微分方程的复振荡理论作为一门边缘领域交叉的学科, 它主要运用亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论[1, 2], 位势理论, Wiman-Valiron 理论,渐进方法等, 研究复域上微分方程解的复振荡性质. 该研究始于 1982 年 S.Bank 和 L.Laine[3, 4]对二阶齐次线性微分方程解的增长级与零点收敛指数的富有创始性的研究工作. 此后, 该领域的研究成为人们研究的热点, 国内外许多学者都进行了大量深入的研究. 例如, J.K.Langley[5], G.Gundersen[6, 7]等人在该领域进行了深入研究, 并取得了许多深刻结果. 在国内, 1989 年, 高仕安[8]对系数为多项式的微分方程解的增长性进行研究, 得到了许多深刻的结果. 随后, 陈宗煊[9-11]解决了该领域内的几个重要问题, 并且对系数分别为多项式, 有理函数, 超越整函数及亚纯函数的线性微分方程的复振荡理论进行了深入研究, 得到了一系列非常有意义的首创性结果.

关于亚纯函数的值分布研究主要体现在函数的模分布和辐角分布两个方面. 一方面, 模分布主要是从亏值的研究出发进行讨论. 国内外著名学者, 杨乐、张广厚、Edrei.A、Fuhcs W.H.J.等在文献[12-15]就此进行讨论得到了一系列有意义的结果. 另一方面, 辐角分布的研究，主要体现在 Julia 方向、Borel 方向、Nevanlinna 方向、Hayman 方向及 T 方向的研究上. 伍胜健、郑建华、张庆德等学者在亚纯函数的奇异方向上都做了大量工作,并取得了非常有价值的结果, 详细内容可参阅文献[16-18].

本文在前人研究的基础上, 分别从高阶线性微分方程解的增长性与辐角分布两方面进行了研究, 进一步探讨高阶线性微分方程解的复振荡性质.

1.2 预备知识及相关定义

1.2.1 复平面内的 Nevanlinna 特征与增长级

首先, 我们简要介绍复平面内 Nevanlinna 理论的相关记号, 详细内容请参阅文献[1-2].

假设 $f(z)$ 为定义在圆盘 $|z| \le R\left(0 < R < \infty\right)$ 上的亚纯函数, a 为某一复常数. 用 $n(r,f)$ (有时也记为 $n(r,f=\infty)$ 或 $n(r,\infty)$) 表示 $f(z)$ 在 $|z| \le r\left(0 \le r < R\right)$ 上的极点个数, 重级极点按其重数计算; 用 $n(r,\frac{1}{f-a})$ (有时也记为 $n(r,f=a)$ 或 $n(r,a)$) 表示 $f(z)-a$ 在 $|z| \le r\left(0 \le r < R\right)$ 上的零点的个数, 重级零点按其重数计算.

对于非负实数 x, 定义正对数

$$\begin{cases} \log^+ x = \log x, & x \ge 1; \\ \log^+ x = 0, & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

显然当 $x > 0$ 时, 有 $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

此外, Nevanlinna 还引入了均值函数和计数函数, 如下所示:

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta,$$

$$m(r,\frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f(re^{i\theta})-a\right|} d\theta, a \ne \infty,$$

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\log r,$$

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,\frac{1}{f-a})-n(0,\frac{1}{f-a})}{t} dt + n(0,\frac{1}{f-a})\log r, a \ne \infty,$$

$m(r,f)$ 有时也记为 $m(r,f=\infty)$ 或 $m(r,\infty)$, 表示 $|f(z)|$ 的正对数在 $|z| = r$ 上的平均值, 相应的, $m(r,\frac{1}{f-a})$ 有时也记为 $m(r,f=a)$ 或 $m(r,a)$, 表示 $\frac{1}{\left|f\left(z\right)-a\right|}$ 的正对数在 $|z| = r$ 上的平均值; $N(r,f)$ 有时记为 $N(r,f=\infty)$ 或 $N(r,\infty)$, 表示 $f(z)$ 极点的密指量, 相应的, $N(r,\frac{1}{f-a})$ 有时也记为 $N(r,f=a)$ 或 $N(r,a)$, 表示 $f(z)$ 的 a 值点的密指量.

定义 1[2] 设 $f(z)$ 为定义在圆 $\left|z\right| \le R\left(0 < R < \infty\right)$ 上的亚纯函数,定义

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

为 $f(z)$ 的特征函数.

定义 2[19,20] 设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数,定义 $f(z)$ 的增长级 $\sigma\left(f\right)$、p 次迭代级 $\sigma_p\left(f\right)$ 与 p 次迭代下级 $\mu_p\left(f\right)$ 分别为

$$\sigma\left(f\right) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T\left(r, f\right)}{\log r},$$

$$\sigma_p\left(f\right) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^{[p]} T\left(r, f\right)}{\log r} \quad \left(p \in N\right),$$

$$\mu_p\left(f\right) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^{[p]} T\left(r, f\right)}{\log r} \quad \left(p \in N\right).$$

定义 3[2] 设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数,定义 $f(z)$ 的零点收敛指数 $\lambda\left(f\right)$ 和极点收敛指数 $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ 分别为

$$\lambda\left(f\right) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \quad \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log N\left(r, f\right)}{\log r}.$$

定义 4[21] 设 $f\left(z\right)$ 是复平面上的无限级亚纯函数,如果实函数 $\rho\left(r\right)$ 满足如下的性质:

(1) $\rho\left(r\right)$ 是 $r \ge r_0\ \left(r_0 > 0\right)$ 上的连续非减函数,并且 $\rho\left(r\right) \to \infty\left(r \to \infty\right)$;

(2)函数 $U\left(r\right) = r^{\rho(r)}\left(r \ge r_0\right)$ 满足

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log U\left(R\right)}{\log U\left(r\right)} = 1, \quad R = r + \frac{r}{\log U\left(r\right)};$$

(3) $\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T\left(r, f\right)}{\rho\left(r\right)\log r} = 1$.

则 $\rho\left(r\right)$ 称为函数 $f\left(z\right)$ 的无限级.

定义 5[2] 设 $f(z)$ 是复平面上的非常数亚纯函数, a 为任意的复数. 定义 a 对于 $f(z)$ 的亏量(或称为亏量)为

$$\delta(a,f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)},$$

容易得出 $0\le\delta(a,f)\le 1$.

1.2.2 角域内的 Nevanlinna 特征及增长级

接下来介绍角域上的 Nevanlinna 特征相关记号与概念.

定义 6[22,23] 设 $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$,则复平面上的角域定义为

$$\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\};$$

$$\overline{\Omega}(\alpha,\beta,r)=\{z:\alpha\le\arg z\le\beta,|z|\le r\}.$$

并记

$$\Omega_{\theta,\varepsilon}=\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)=\{z:\theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon\}.$$

若 f 为整函数,记 $M\left(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f\right)=\sup\left\{\left|f\left(te^{i\theta}\right)\right|:\alpha\le\theta\le\beta,0<t\le r\right\}$.

若 f 为亚纯函数,记

$$A_{\alpha,\beta}(r,f)=\frac{k}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+\left|f\left(te^{i\alpha}\right)\right|+\log^+\left|f\left(te^{i\beta}\right)\right|\right\}\frac{dt}{t};$$

$$B_{\alpha,\beta}(r,f)=\frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\sin k(\theta-\alpha)d\theta;$$

$$C_{\alpha,\beta}(r,f)=2\sum_{b_\nu\in\Delta}\left(\frac{1}{\left|b_\nu\right|^k}-\frac{\left|b_\nu\right|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\beta_\nu-\alpha),$$

其中 $k=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}$, $b_\nu=|b_\nu|e^{i\beta_\nu}$ 为 $f(z)$ 在扇形区域 $\Delta=\{z:\alpha<\arg z<\beta,1\le|z|\le r\}$ 内的极点,重级极点按重数计算. 进一步定义

$$D_{\alpha,\beta}(r,f)=A_{\alpha,\beta}(r,f)+B_{\alpha,\beta}(r,f),\quad S_{\alpha,\beta}(r,f)=C_{\alpha,\beta}(r,f)+D_{\alpha,\beta}(r,f).$$

定义 7 设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数,则 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的增长级 $\sigma_{\alpha,\beta}(f)$ 和 p 次迭代级 $\sigma_{p,\alpha,\beta}$ 分别定义为

$$\sigma_{\alpha,\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+} S_{\alpha,\beta}(r,f)}{\log r},$$

$$\sigma_{p,\alpha,\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{[p]} S_{\alpha,\beta}(r,f)}{\log r}\quad (p\in N).$$

定义 8[24] 令 $p\in N$, $f(z)$是复平面上的亚纯函数, $f(z)$在角域$\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$上的 p 次迭代级零点收敛指数定义为

$$\lambda_{p,\theta,\varepsilon}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{[p]} n(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f=0)}{\log r};$$

$f(z)$沿径向$\arg z=\theta$上的 p 次迭代级零点收敛指数则定义为

$$\lambda_{p,\theta}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{p,\theta,\varepsilon}(f).$$

特别地,当 $p=2$ 时, $f(z)$沿径向上的 p 次迭代级零点收敛指数称为径向上 $f(z)$的超级零点收敛指数,记为$\lambda_{2,\theta}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{2,\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(f)$.

定义 9[24] 令 $p\in N$,且 $f(z)$是 p 次迭代级为$\rho(0<\rho\le\infty)$的亚纯函数. 如果对任意小的正数$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, $f(z)$对任意的复数$a\in C_{\infty}$都有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{[p]} n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=a)}{\log r}=\rho$$

成立,至多除去两个例外的复数, 则称射线$L:\arg z=\theta$为 $f(z)$的 p 次迭代 ρ 级 Borel 方向.

特别地,(1)当 $p=1$时,射线$L:\arg z=\theta$称为$f(z)$的一条ρ级 Borel 方向;(2)当 $p=2$时,射线$L:\arg z=\theta$称为$f(z)$的一条超级为ρ的 Borel 方向.

定义 10[25] 射线$J:\arg z=\theta$称为亚纯函数$f(z)$的一条$\rho(r)$无限级 Borel 方向,如果对任意的$\varepsilon>0$和任意的复数$a\in C_{\infty}$,有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=a)}{\rho(r)\log r}=1$$

成立,至多除去可能的两个例外复数a值.

第二章　高阶非齐次线性微分方程解沿径向的振荡性质

2.1　引言与结果

关于高阶非齐次线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F \tag{2.1}$$

解在全平面上的整体振荡性质,前人有过不少研究(参阅文献[26-29]). 特别地,陈宗煊、杨重骏在文献[26]中得到了如下结果.

定理 2.1.A 设 A_0 , $A_1,\cdots,$ A_{k-1} 是整函数, F 是不恒为零的整函数,若存在 A_s $(s\in\{0,\cdots,k-1\})$,满足

$$b=\max\{\sigma(F),\sigma(A_j),(j\neq s)\}<\sigma(A_s)<\frac{1}{2},\quad (j=0,1,\cdots,k-1)$$

那么微分方程(2.1)的每一个超越解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)=\overline{\lambda_2}(f)=\sigma(A_s)$.

定理 2.1.B 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数, $\max\limits_{1\le j\le k-1}\{\sigma(A_j)\}<\sigma(A_0)<\infty$, F 是不恒为零的整函数,且 $\sigma(F)<\infty$,则方程(2.1)的每一个解 $f(z)$ 满足 $\sigma_2(f)=\overline{\lambda_2}(f)=\sigma(A_0)$,至多有一个例外解 f_0 .

最近,吴昭君受文[30,31]的启发,在文献[24]中讨论了与方程(2.1)相应的齐次方程

$$f^{(k)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+\cdots+A_0f=0 \tag{2.2}$$

的解沿径向上的振荡性质,得到如下结果.

定理 2.1.C 设 A_0 , $A_1,\cdots,$ A_{k-2} 中的某些(或全部)为超越整函数,且 $p=\max\limits_{0\le j\le k-2}\{i(A_j)\}<\infty$. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 为方程(2.2)的一组基础解系,并令 $E=f_1\cdots f_k$,那么 $i(E)\le(p+1)$. 如果 $\sigma_{(p+1)}(E)=\rho>0$,那么以下结论等价

(i) $L:\arg z=\theta$ 是 E 的 $p+1$ 次迭代 ρ 级 Borel 方向;

(ii) $\lambda_{p+1,\theta}(E)=\rho$;

(iii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log^{[p+2]} M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},E)}{\log r} = \rho$.

其中 $i(A_j)$ 为系数 $A_j(z)$ 的迭代级增长指标.

定理 2.1.A 和定理 2.1.B 探讨了整系数高阶微分方程(2.1)的解在全平面上的增长级及超级. 接下来我们进一步研究解的超级 Borel 方向、解沿径向上的超级和沿径向上的超级零点收敛指数,这样我们将会对解的性质有更深入的认识. 本文证明了如下定理.

定理 2. 1. 1 假设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为有限级整函数, F 是不恒为零的有限级整函数. 若 f 为方程(2.1)的超越解,且满足 $\sigma_2(f) = \rho(0 < \rho < \infty)$,则以下结论等价

(i) $L: \arg z = \theta$ 是解 f 的超级为 ρ 的 Borel 方向;

(ii) $\lambda_{2,\theta}(f) = \rho$;

(iii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log^{[3]} M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)}{\log r} = \rho$.

定理 2. 1. 2 假设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为有限级整函数, F 是不恒为零的有限级整函数,若存在 $A_s(s \in \{0,\ldots,k-1\})$,满足

$$b = \max\{\sigma(F), \sigma(A_j), (j \neq s)\} < \sigma(A_s) < \frac{1}{2}, \quad (j = 0,1,\cdots,k-1)$$

那么对方程(2.1)的每一个超越解 f ,以下结论等价

(i) $L: \arg z = \theta$ 是解 f 的超级为 $\sigma(A_s)$ 的 Borel 方向;

(ii) $\lambda_{2,\theta}(f) = \sigma(A_s)$;

(iii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log^{[3]} M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)}{\log r} = \sigma(A_s)$.

定理 2. 1. 3 假设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为整函数, $\max\limits_{1\le j\le k-1}\{\sigma(A_j)\} < \sigma(A_0) < \infty$, F 是不恒为零的有限级整函数,那么对方程(2.1)的每一个超越解 f ,以下结论等价,至多有一个例外解 f_0

(i) $L: \arg z = \theta$ 是解 f 的超级为 $\sigma(A_0)$ 的 Borel 方向;

(ii) $\lambda_{2,\theta}(f) = \sigma(A_0)$;

(iii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log^{[3]} M\left(r, \Omega_{\theta,\varepsilon}, f\right)}{\log r} = \sigma\left(A_0\right)$.

2.2 引理

在上述定理的证明中需要用到下列引理.

引理 2.2.1[32] 设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\le 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数,那么对任意的 $a \in \mathrm{C}$,有

$$S_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = S_{\alpha,\beta}(r,f) + \varepsilon(r,a),$$

其中当 $r\to\infty$ 时, $\varepsilon(r,a)=O(1)$.

引理 2.2.2[32] 设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\le 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数,那么对任意的 $a_j \in C_\infty$, $j=1,2,\cdots,q$,有

$$(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,f) \le \sum_{j=1}^{q} \overline{C}_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + O(\log rT(r,f)), \quad r \notin E,$$

其中 E 是一个线性测度有限的集合.

引理 2.2.3[33] 设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\le 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数,那么对任意的 $r<R$,有

$$A_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le K\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^k \int_1^R \frac{\log^+ T(t,f)}{t^{1+k}}dt + \log^+\frac{r}{R-r} + \log\frac{R}{r} + 1\right\},$$

$$B_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le \frac{4k}{r^k} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \ ,$$

其中 $k=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}$, K 为一不依赖于 r 和 R 的正常数.

引理 2.2.4[24] 令 $p\in N$ 且 $p>1$, f 是一个满足 $\sigma_p(f)=\rho(0<\rho<\infty)$ 的亚纯函数,则一条射线 $L:\arg z=\theta$ 是 f 的 p 次迭代 ρ 级 Borel 方向的充要条件为,对任意的 $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}\right)$,在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内,有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{[p]} S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\log r}=\rho .$$

引理 2.2.5 设 $A_0, A_1,\cdots, A_{k-1}$ 为有限级整函数, F 是不恒为零的有限级整函数, f 是方程(2.1)的解,且满足 $\sigma_2(f)=\rho(\rho<\infty)$,那么对任意的 $\theta\in(0,2\pi]$ 以及充分小的 $\varepsilon>0$,在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内,当 r 充分大时,有

$$S_{\theta,\varepsilon}(r,f)=C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1).$$

证明 假设 f 为方程(2.1)的解,且 $\sigma_2(f)=\rho(\rho<\infty)$,将方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+...+A_0 f=F$$

变形为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+...+A_1\frac{f'}{f}+A_0\right). \tag{2.3}$$

根据引理 2.2.1,对任给的 $\varepsilon>0$ 和 $\theta\in(0,2\pi]$,在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内,当 $r\to\infty$ 时,有

$$\begin{aligned}S_{\theta,\varepsilon}(r,f)&=S_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1)\\&=D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)+C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1).\end{aligned} \tag{2.4}$$

已知 F 为有限级的整函数,不妨设 $\sigma(F)=\rho_0$,对任意的 $\varphi\in\Omega_{\theta,\varepsilon}$,有

$$\rho_0=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,F)}{\log r}\ge\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|}{\log r},$$

故当 r 充分大时,对任意的 $\eta>0$,有 $\log\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|<r^{\rho_0+\eta}$.

再由 $A_{\alpha,\beta}, B_{\alpha,\beta}$ 的定义知,当 r 充分大并取 η 和 ε 满足 $\rho_0+\eta<k=\frac{\pi}{2\varepsilon}$ 时,有

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,F)=A_{\theta,\varepsilon}(r,F)+B_{\theta,\varepsilon}(r,F)=O(1). \tag{2.5}$$

又 $\lambda(F)\le\sigma(F)=\rho_0$,故

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,F=0)}{\log r}\le\rho_0,$$

即 $n(r,F=0)\le r^{\rho_0+\eta}$.

设 $a_v=|a_v|e^{i\theta_v}$ 为 F 在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内的所有零点,由 $C_{\alpha,\beta}$ 定义知

$$C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)=2\sum_{\substack{a_v\in\Omega_{\theta,\varepsilon}\\ 1\le|a_v|\le r}}\left(\frac{1}{|a_v|^k}-\frac{|a_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\theta_v-\theta+\varepsilon)$$

$$\le 2\sum_{\substack{a_v\in\Omega_{\theta,\varepsilon}\\ 1\le|a_v|\le r}}\left(\frac{1}{|a_v|^k}\right)=2\int_1^r\frac{dn(t)}{t^k}$$

$$=2\left(\left.\frac{n(t)}{t^k}\right|_1^r+k\int_1^r\frac{n(t)}{t^{k+1}}dt\right),$$

其中 $n(t)=n(t,\Omega_{\theta,\varepsilon},F=0)$.因 $n(t,\Omega_{\theta,\varepsilon},F=0)\le n(t,F=0)\le t^{\rho_0+\eta}$,则有

$$C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)=O(1). \tag{2.6}$$

故

$$D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)=S_{\theta,\varepsilon}(r,F)-C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(1)$$

$$=D_{\theta,\varepsilon}(r,F)+C_{\theta,\varepsilon}(r,F)-C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(1).$$

由 F 为整函数知 $C_{\theta,\varepsilon}(r,F)=0$,那么结合(2.5)(2.6)式,有

$$D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)=O(1). \tag{2.7}$$

因 $A_i(i=0,1...,k-1)$ 也为有限级的整函数,类似于 $D_{\theta,\varepsilon}(r,F)$ 的估计,有

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,A_i)=O(1). \tag{2.8}$$

对满足引理 2.2.5 条件的解 f,由引理 2.2.3 知,对任意的 $\theta\in(0,2\pi]$ 及充分小的 ε(ε 满足 $\rho+1<\dfrac{\pi}{2\varepsilon}$),当取 $R=2r$ 时,有

$$A_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O\left(\int_1^{2r}\frac{\log^+T(t,f)}{t^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon}}}dt\right)=O\left(\int_1^{2r}\frac{t^{\rho+1}}{t^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon}}}dt\right)=O(1).$$

因

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O\left(\log rT\left(r,f\right)\right)=O\left(r^{\rho+1}\right),$$

再由引理 2.2.3,当 r 充分大时

$$B_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le\frac{4\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)}{r^{\frac{\pi}{2\varepsilon}}}m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O(1)\cdot$$

所以,当 r 充分大时

$$D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O(1)\cdot \tag{2.9}$$

又因为

$$D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f^{(h)}}{f}\right)\le\sum_{l=1}^{h}D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f^{(l)}}{f^{(l-1)}}\right)+O(1), \tag{2.10}$$

其中 $h=2,3,\cdots,k$.

所以由(2.3),(2.7)—(2.10)式得,当 r 充分大时

$$D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{i=0}^{k-1}D_{\theta,\varepsilon}(r,A_i)+\sum_{h=1}^{k}D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f^{(h)}}{f}\right)+O(1)=O(1). \tag{2.11}$$

将(2.11)式代入(2.4)式知,当 r 充分大时,有

$$S_{\theta,\varepsilon}(r,f)=C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1),$$

至此引理 2.2.5 证毕.

引理 2.2.6[32] 设 f 在角域 $\Omega_{\alpha,\beta}$ 内解析,那么有

$$\log M\left(r,\Omega_{\alpha,\beta},f\right)\le Kr^{k}\left\{S_{\alpha,\beta}(2r,f)+1\right\},$$

成立,其中 $k=\frac{\pi}{\beta-\alpha}$,$M\left(r,\Omega_{\alpha,\beta},f\right)=\sup\left\{\left|f\left(te^{i\tau}\right)\right|:\alpha\le\tau\le\beta,1\le t\le r\right\}$,$K$ 是一正常数.

2.3 定理的证明

2.3.1 定理 2.1.1 的证明

假设 f 是方程(2.1)的解,且满足 $\sigma_2(f)=\rho(0<\rho<\infty)$.

①证明 (i) (ii) 等价

假设 $L:\arg z=\theta$ 是 f 超级为 ρ 的 Borel 方向.根据引理 2.2.4,对任何正数

$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\log r}=\rho$$

在角域$\Omega_{\theta,\varepsilon}$内成立.再结合引理 2.2.5,可推出

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}=\rho .$$

注意到$C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le 2n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)$,便有$\rho\le\lambda_{2,\theta}(f)\le\sigma_2(f)=\rho$,所以有

$$\lambda_{2,\theta}(f)=\rho .$$

反过来,假设$\lambda_{2,\theta}(f)=\rho$,对任意的$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,设$a_\mu=|a_\mu|e^{i\theta_\mu}$为$f$在角域$\Omega_{\theta,\varepsilon}$内的所有零点,由$C_{\alpha,\beta}$的定义知

$$\begin{aligned}C_{\theta,\varepsilon}\left(2r,\frac{1}{f}\right)&\ge C_{\theta,\frac{\varepsilon}{2}}\left(2r,\frac{1}{f}\right)\\&\ge 2\sum_{\substack{a_\mu\in\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{2}}\\1\le|a_\mu|\le r}}\left(\frac{1}{|a_\mu|^k}-\frac{|a_\mu|^k}{(2r)^{2k}}\right)\sin k\left(\theta_\mu-\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right)\\&\ge 2\sum_{\substack{a_\mu\in\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}}\\1\le|a_\mu|\le r}}\left(\frac{1}{|a_\mu|^k}-\frac{|a_\mu|^k}{(2r)^{2k}}\right)\sin k\left(\theta_\mu-\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right),\end{aligned}\tag{2.12}$$

其中$k=\frac{\pi}{\varepsilon}$,且$a_\mu\in\left\{z:\theta-\frac{\varepsilon}{3}<\arg z<\theta+\frac{\varepsilon}{3},1<|a_\mu|<r\right\}$时,有$\frac{\varepsilon}{6}<\theta_\mu-\theta+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{5\varepsilon}{6}$,进而有$\sin k\left(\theta_\mu-\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right)\ge\frac{1}{2}$.将(2.12)式改写为 stieltjes 积分形式

$$\begin{aligned}C_{\theta,\varepsilon}\left(2r,\frac{1}{f}\right)&\ge\int_1^r\frac{1}{t^k}dn(t)-\frac{1}{(2r)^{2k}}\int_1^r t^k dn(t)\\&\ge k\int_1^r\frac{1}{t^{k+1}}n(t)\,dt+\frac{n(r)}{r^k}-\frac{r^k n(r)}{(2r)^{2k}}+\frac{k}{(2r)^{2k}}\int_1^r t^{k-1}n(t)\,dt\end{aligned}$$

$$\geq \frac{n(r)}{r^k} - \frac{r^k n(r)}{(2r)^{2k}} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)\frac{n(r)}{r^k} \quad ,$$

则

$$S_{\theta,\varepsilon}(2r, f) = S_{\theta,\varepsilon}\left(2r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \geq C_{\theta,\varepsilon}\left(2r, \frac{1}{f}\right) + O(1)$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)\frac{n(r)}{r^k} + O(1),$$

其中 $n(r) = n\left(t, \Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}}, f = 0\right)$.因此对任意的 $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$,在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内有

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log S_{\theta,\varepsilon}(r, f)}{\log r} = \rho .$$

结合引理 2.2.4,可证得 $L: \arg z = \theta$ 是解 f 的一条超级为 ρ 的 Borel 方向.

②证明 (i) (iii) 等价

假设 $L: \arg z = \theta$ 是整函数解 f 的超级为 ρ 的 Borel 方向,由引理 2.2.4,对任意的正数 $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$,在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log S_{\theta,\varepsilon}(r, f)}{\log r} = \rho . \tag{2.13}$$

如果存在 $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}, T < \rho$ 使得

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log^{[3]} M(r, \Omega_{\theta,\varepsilon}, f)}{\log r} < T < \rho ,$$

那么对充分大的 r 以及所有的 $\varphi \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ 都有

$$\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| < \exp r^T . \tag{2.14}$$

已知 f 为整函数,结合角域内的 Nevanlinna 特征函数的定义及(2.14),则可以证明在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内有

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log S_{\theta,\varepsilon}(r, f)}{\log r} < \rho .$$

这与(2.13)式矛盾.因此,对任意的$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{[3]}M\left(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f\right)}{\log r}=\rho.$$

反过来,如果对任意的$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,已知

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{[3]}M\left(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f\right)}{\log r}=\rho,$$

根据引理 2.2.6 在角域$\Omega_{\theta,\varepsilon}$内有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log S_{\theta,\varepsilon}\left(r,f\right)}{\log r}=\rho.$$

根据引理 2.2.4 可知$L:\arg z=\theta$是解f超级为ρ的 Borel 方向.

定理 2.1.1 证明完毕.

2.3.2 定理 2.1.2 的证明

由定理 2.1.A 知非齐次微分方程(2.1)的所有超越解f都满足$\sigma_2(f)=\sigma(A_s)(0<\sigma(A_s)<\infty)$.并且由定理 2.1.2 的条件$A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$为有限级整函数,$F$是不恒为零的有限级整函数,那么只须在定理 2.1.1 中令$\rho=\sigma(A_s)$便可得到定理 2.1.2 的结果.

2.3.3 定理 2.1.3 的证明

由定理 2.1.B 知非齐次微分方程(2.1)的所有解f满足$\sigma_2(f)=\sigma(A_0)\ 0<\sigma(A_0)<\infty$,至多除去一个例外解$f_0$.并且由定理 2.1.3 的条件$A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$为有限级整函数,$F$是不恒为零的有限级整函数,那么只须在定理 2.1.1 中令$\rho=\sigma(A_0)$便可得到定理 2.1.3 的结果.

第三章　复振荡中的辐角分布

3.1　引言与结果

设 f_1, f_2 是微分方程

$$f'' + Af = 0 \tag{3.1}$$

的两个线性无关解,其中 A 是整函数.

2007 年,吴昭君和孙道椿在文[34]中研究了方程(3.1)的线性无关解之乘积的零点分布与 $\rho(r)$ 级 Borel 方向之间的关系,证明了下面的结果.

定理 3.1.A 设 $A(z)$ 是有限级超越整函数, f_1, f_2 是方程(3.1)的两个线性无关解,记 $E = f_1 f_2$,再设 E 的零点收敛指数 $\lambda(E) = \infty$,且 $\rho(r)$ 是 E 的一个无限级,则射线 $\arg z = \theta$ 是 E 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r, \Omega_{\theta,\varepsilon}, E = 0)}{\rho(r) \log r} = 1.$$

对于高阶齐次线性微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-2} f^{(k-2)} + \cdots + A_0 f = 0 \ (k \geq 2) \tag{3.2}$$

文献[34]中也研究了类似的问题,研究表明,定理 3.1.A 中关于二阶方程解的性质可以推广到高阶方程的情形,即有下面的定理.

定理 3.1.B 如果方程(3.2)中 $A_0, \cdots, A_{k-2}$ 为有限级整函数且至少有一个是超越的.设 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 是方程(3.2)的 k 个线性无关的解,记 $E = f_1 f_2 \cdots f_k$.再设 E 的零点收敛指数 $\lambda(E) = \infty$,且 $\rho(r)$ 是 E 的一个无限级,则射线 $\arg z = \theta$ 是 E 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r, \Omega_{\theta,\varepsilon}, E = 0)}{\rho(r) \log r} = 1.$$

受定理 3.1.A 和定理 3.1.B 的启发,本章研究了更一般的高阶非齐次线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0 f=F \tag{3.3}$$

解 $f(z)$的零点聚值线与 $\rho(r)$级 Borel 方向之间的关系,证得如下结果.

定理 3.1.1 设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 是有限级整函数,F 是不恒为零的有限级整函数,设 $f(z)$为方程(3.3)的无穷级解,满足 $\sigma_2(f)<\infty$,且 $\rho(r)$是 $f(z)$的一个无限级,则射线 L: $\arg z=\theta$ 是解 $f(z)$的一条 $\rho(r)$级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

定理 3.1.2 设 A_0, $\cdots$, A_{k-1} 是整函数,F 是不恒为零的整函数,若存在 A_s $(s\in\{0,\cdots,k-1\})$,满足

$$b=\max\{\sigma(F),\sigma(A_j),(j\neq s)\}<\sigma(A_s)<\frac{1}{2},\ \ (j=0,1,\cdots,k-1)$$

那么对于微分方程(3.3)的超越解 $f(z)$,当 $\rho(r)$是解 $f(z)$的一个无限级时,射线 L: $\arg z=\theta$ 是解 $f(z)$的一条 $\rho(r)$级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

定理 3.1.3 设 A_0, $\cdots$, A_{k-1} 是整函数, $\max\limits_{1\le j\le k-1}\{\sigma(A_j)\}<\sigma(A_0)<\infty$, F 是不恒为零的整函数,且 $\sigma(F)<\infty$,那么对于方程(3.3)的所有解 $f(z)$,至多有一个例外解 f_0,当 $\rho(r)$是解 $f(z)$的一个无限级时,射线 L: $\arg z=\theta$ 是解 $f(z)$的一条 $\rho(r)$级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

3.2 引理

引理 3.2.1[25] 设 $f(z)$是复平面上的无限级亚纯函数,$\rho(r)$是 $f(z)$的一个无限级,则射线 L: $\arg z=\theta$ 是 $f(z)$的一条 $\rho(r)$级 Borel 方向的充要条件是:对任意的

$\eta\left(0<\eta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\eta,\theta+\eta}(r,f)}{\rho(r)\log r}=1.$$

引理 3.2.2 设 $f(z)$是复平面上的无限级亚纯函数,$\rho(r)$是 $f(z)$的一个无限级,对于任意充分小的$\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}\right)$,如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}<1,$$

则对任意的$a\in C$,必有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}},f=a\right)}{\rho(r)\log r}<1.$$

证明 如若不然,则存在充分小的$0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$,使得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}<1,\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}},f=a\right)}{\rho(r)\log r}\geq 1.$$

由定义 4,我们有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}},f=a\right)}{\log U(R)}&=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}},f=a\right)}{\log U(r)}\frac{\log U(r)}{\log U(R)}\\&\geq\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}},f=a\right)}{\log U(r)}\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log U(r)}{\log U(R)}\geq 1,\end{aligned}$$

其中$R=r+\dfrac{r}{\log U(r)}$.则对任意的$\tau>0$ (要求$1-\tau>\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}$),存在一列$\left\{R_n=r_n+\dfrac{r_n}{\log U(r_n)}\right\}(r_n\to\infty)$,满足

$$n(r_n)=n\left(r_n,\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}},f=a\right)\geq\left(U(R_n)\right)^{1-\tau}.$$

假设$a_\mu=|a_\mu|e^{i\theta_\mu}$ $(\mu=1,2,\cdots)$为$f=a$在角域$\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}}$内的所有根,重根按重级计算,由于$\theta-\frac{\varepsilon}{3}<\theta_\mu<\theta+\frac{\varepsilon}{3},\mu=1,2,\cdots$,则$\frac{\varepsilon}{6}<\theta_\mu-\theta+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{5\varepsilon}{6}$,从而$\sin\dfrac{\pi}{\varepsilon}\left(\theta_\mu-\theta+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)>\dfrac{1}{2}$.由关于$S_{\alpha,\beta}(r,f)$的第一基本定理及$C_{\alpha,\beta}$的定义,我们有

$$S_{\theta,\varepsilon}(R_n,f)\geq C_{\theta,\varepsilon}(R_n,a)+O(1)\geq C_{\theta,\frac{\varepsilon}{2}}(R_n,a)+O(1)$$

$$\geq 2\sum_{\substack{a_\mu\in\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{2}}\\ 1\leq|a_\mu|\leq r_n}}\left(\frac{1}{|a_\mu|^k}-\frac{|a_\mu|^k}{(R_n)^{2k}}\right)\sin k(\theta_\mu-\theta+\varepsilon)+O(1)$$

$$\geq 2\sum_{\substack{a_\mu\in\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}}\\ 1\leq|a_\mu|\leq r_n}}\left(\frac{1}{|a_\mu|^k}-\frac{|a_\mu|^k}{(R_n)^{2k}}\right)\sin k(\theta_\mu-\theta+\varepsilon)+O(1)$$

$$>\sum_{\substack{a_\mu\in\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}}\\ 1\leq|a_\mu|\leq r_n}}\left(\frac{1}{|a_\mu|^k}-\frac{|a_\mu|^k}{(R_n)^{2k}}\right)+O(1),$$

其中 $k=\dfrac{\pi}{\varepsilon}$,将上式中的和式改写为 stieltjes 积分形式,并进行分部积分得

$$S_{\theta,\varepsilon}(R_n,f)\geq\int_1^{r_n}\frac{1}{t^k}dn(t)-\frac{1}{R_n^{\ 2k}}\int_1^{r_n}t^k dn(t)+O(1)$$

$$\geq k\int_1^{r_n}\frac{1}{t^{k+1}}n(t)dt+\frac{n(r_n)}{r_n^{\ k}}-\frac{r_n^{\ k}n(r_n)}{R_n^{\ 2k}}+\frac{k}{R_n^{\ 2k}}\int_1^{r_n}t^{k-1}n(t)dt+O(1)$$

$$\geq\frac{n(r_n)}{r_n^{\ k}}-\frac{r_n^{\ k}n(r_n)}{R_n^{\ 2k}}+O(1)$$

$$\geq\frac{n(r_n)}{r_n^{\ k}}-\frac{R_n^{\ k}n(r_n)}{R_n^{\ 2k}}+O(1)$$

$$\geq\left(\frac{1}{r_n^{\ k}}-\frac{1}{R_n^{\ k}}\right)n(r_n)+O(1),$$

于是

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(R_n,f)}{\rho(R_n)\log R_n}$$

$$\geq\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\left(\frac{1}{r_n^{\ k}}-\frac{1}{R_n^{\ k}}\right)}{\rho(R_n)\log R_n}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n(r_n)}{\rho(R_n)\log R_n}$$

$$\geq 1-\tau+\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\left(R_n^{\ k}-r_n^{\ k}\right)-\left(\log R_n^{\ k}+\log r_n^{\ k}\right)}{\rho(R_n)\log R_n}$$

$$=1-\tau+\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\left\{\left(r_n+\frac{r_n}{\log U(r_n)}\right)^k-r_n^{\ k}\right\}}{\rho(R_n)\log R_n}=1-\tau\,.$$

这与τ的假设矛盾.即引理 3.2.2 得证.

引理 3.2.3 设$f(z)$是复平面上的无限级亚纯函数,$\rho(r)$是$f(z)$的一个无限级,则对充分小的$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}\le 1.$$

证明 事实上由不等式

$$\overline{C}_{\theta,\varepsilon}(r,a)\le 2n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=a)$$

和

$$n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=a)\le n(r,f=a)\le N(R,f=a)\frac{1}{\log\frac{R}{r}}\le T(R,f=a)\frac{1}{\log\frac{R}{r}},$$

其中$R>r\ge 0$是任意的.注意到$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\rho(r)\log r}=1$,因此对任意的$\upsilon>0$当$r$充分大时,有

$$T(r,f=a)<U(r)^{1+\upsilon},$$

从而当$R=r+\frac{r}{\log U(r)}$充分大时

$$n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=a)<\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-1}(U(R))^{1+\upsilon}=\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{\log U(r)}\right)}U(R)^{1+\upsilon}.$$

结合引理 2.2.2 及定义 4,并取$q=3$,即得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{C}_{\theta,\varepsilon}(r,a_j)+O(\log U(r))\right]}{\log U(r)}$$

$$\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left[\sum_{j=1}^{3}2n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=a_j)+O(\log U(r))\right]}{\log U(r)}$$

$$\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left[6\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{\log U(r)}\right)}(U(R))^{1+\upsilon}+O(\log U(r))\right]}{\log U(r)}$$

$$=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log(U(R))^{1+\upsilon}}{\log U(r)}=1.$$

引理 3.2.3 得证.

3.3 定理的证明

3.3.1 定理 3.1.1 的证明

由引理 3.2.1 可知,如果能证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0\right)}{\rho(r)\log r}=1$$

的充分必要条件是对任意充分小的$\varepsilon>0$,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}=1$$

成立,则定理得证.

下面证明这一结论.

首先证明必要性,根据引理 3.2.3,对任意的$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,有$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}\leq 1$.假设$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}<1$,则由引理 3.2.2 必有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\frac{\varepsilon}{3}},f=0\right)}{\rho(r)\log r}<1.$$

由ε的任意性我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0\right)}{\rho(r)\log r}<1$$

矛盾.所以$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}=1$.必要性成立.

下证充分性,由引理 2.2.5 可知,对任意充分小的$\varepsilon>0$,当r充分大时

$$S_{\theta,\varepsilon}(r,f)=C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1) \tag{3.5}$$

假设对于充分小的$\varepsilon>0$,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)}{\rho(r)\log r}=1.$$

那么由(3.5)式可知

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\rho(r)\log r}=1.$$

因为$C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le 2n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)$,因此

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}\ge 1.$$

但由定义 4 知

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}\le\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\rho(r)\log r}=1,$$

所以有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

由ε的任意性知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

综上所述充分性成立.

因此,定理 3.2.1 证明完成.

3.3.2 定理 3.1.2 的证明

由于定理 3.1.2 的条件满足定理 2.1.A 的条件,那么由定理 2.1.A 知方程(3.3)的所有超越解$f(z)$为无穷级,且满足$\sigma_2(f)=\sigma(A_s)<\frac{1}{2}<+\infty$,再应用定理 3.1.1 可知,射线 L: $\arg z=\theta$是解$f(z)$的一条$\rho(r)$级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

3.3.3 定理 3.1.3 的证明

由定理 2.1.B 知方程(3.3)的所有解f为无限级,且$\sigma_2(f)=\sigma(A_0)<\infty$,至多有一个例外解$f_0$.另外根据定理 3.1.3 条件可知$A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$为有限级整函数,$F$是不恒为零的有限级整函数,并且$\sigma_2(f)<+\infty$.那么直接应用定理 3.1.1 的结果我们可以得到定理 3.1.3 的结论.

第四章　一类亚纯系数二阶微分方程解的超级

4.1　引言与结果

在文献[35]中,作者讨论了线性微分方程

$$f''+h(z)e^{P(z)}f'+Q(z)f=0 \tag{4.1}$$

解的增长性,其中 $P(z)$ 为 n 次多项式,$h(z)$ 为亚纯函数,$Q(z)$ 为整函数,通过对 $h(z)$ 的增长级和 $Q(z)$ 的 *Borel* 方向的限制,证明了如下结果.

定理 4.1.A 假设 $P(z)$ 是一个次数为 n 的非常数多项式,$h(z)$ 是 $\sigma(h)<n$ 的亚纯函数. $Q(z)$ 为具有无穷亏值的有限级整函数,且 $Q(z)$ 只有有限条 *Borel* 方向: $B_j:\arg z=\theta_j(j=1,\cdots,q)$.定义 $\Omega_j=\{z:\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}\}$, $j=1,\cdots,q$.同时假设对任意的 Ω_j,存在 $\varphi_j(\theta_j<\varphi_j<\theta_{j+1})$,使得 $\delta(P,\varphi_j)<0$.那么方程(4.1)的所有超越亚纯解 $f(z)$ 满足: $\sigma(f)=\infty,\sigma_2(f)\geq\sigma(Q)$.

本章对定理 4.1.A 中的问题进行了进一步讨论,得到的主要结果如下:

定理 4.1.1 假设 $P(z)$ 是一个 n 次多项式,$h(z)$ 是 $\sigma(h)<n$ 的亚纯函数,$Q(z)$ 为具有无穷亏值的有限级整函数, $\deg P<\sigma(Q)$,且 $Q(z)$ 只有有限条 *Borel* 方向: $B_j:\arg z=\theta_j(j=1,\cdots,q)$.记 $\Omega_j=\{z:\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}\}$, $j=1,\cdots,q$.同时假设对 $\forall\Omega_j,\exists\varphi_j(\theta_j<\varphi_j<\theta_{j+1})$,使得 $\delta(P,\varphi_j)<0$.那么方程(4.1)的所有具有有限个极点的超越亚纯解 $f(z)$ 满足: $\sigma(f)=\infty,\sigma_2(f)\geq\sigma(Q)\geq\mu_2(f)$,进一步,若 $\mu_2(f)=\sigma_2(f)$,则 $\sigma_2(f)=\sigma(Q)$.

4.2　引理

定理的证明需要用到以下引理.

引理 4.2.1[6] 假设 $f(z)$是超越亚纯函数,设$\Gamma=\{(k_1,j_1),\cdots,(k_m,j_m)\}$表示一个整数对集合,满足$k_i>j_i\ge 0(i=1,\cdots,m)$, $\alpha>1$是一给定实常数,那么存在对数测度为有限的子集$E_1\subset(1,+\infty)$,并存在仅依赖于α和β的常数$B>0$,使得对所有$|z|=r\notin E_1\cup[0,1]$的z和$(k,j)\in\Gamma$有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le B\left[\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha}r\log T(\alpha r,f)\right]^{k-j}.$$

特别地,当$f(z)$为有限级超越亚纯函数时有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le|z|^{(k-j)(\sigma(f)-1+\varepsilon)}.$$

引理 4.2.2[36] 假设$f(z)$为有限级亚纯函数,那么对任意给定的$\varepsilon>0$,存在一个线性测度和对数测度都为有穷的集合$E_2\subset(1,+\infty)$,当$|z|=r\notin[0,1]\cup E_2,r\to\infty$时,有

$$|f(z)|\le\exp\{r^{\sigma(f)+\varepsilon}\}.$$

引理 4.2.3[8] 设$H(z)=h(z)e^{P(z)}$,其中$P(z)$是一个次数为n的多项式,$h(z)$是$\sigma(h)<n$的亚纯函数,那么存在一个集合$E_3\subset[0,2\pi)$, $mE_3=0$,使得对所有的$\varphi\in[0,2\pi)\setminus E_3$有

(i)如果$\delta(P,\varphi)<0$,那么存在常数$R_0=R_0(\varphi)>0$,使得下面的不等式对所有的$r>R_0$成立

$$\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|<\exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\varphi)r^n\right\}.$$

(ii)如果$\delta(P,\varphi)>0$,那么存在常数$R_0=R_0(\varphi)>0$,使得下面的不等式对所有的$r>R_0$成立

$$\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|>\exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\varphi)r^n\right\}.$$

引理 4.2.4[37] 设 $f(z)=\dfrac{g(z)}{d(z)}$为具有有限个极点的亚纯函数,其中 $g(z)$为超越整函数, $d(z)$ 是由 $f(z)$ 的极点构成的多项式,假设 z 满足在 $|z|=r, |g(z)|=M(r,g)$,

$\nu_g(r)$表示 g 的中心指标,那么存在子集 $E_4\subset(1,\infty)$,其对数测度 $lmE_4<\infty$,当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4$时

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n(1+o(1)) \quad (n\geq 1\text{为整数}).$$

4.3 定理的证明

4.3.1 定理 4.1.1 的证明

定理 4.1.1 结论的前半部分 $\sigma(f)=\infty, \sigma_2(f)\geq\sigma(Q)$在定理 4.1.A 中已证.下证 $\sigma(Q)\geq\mu_2(f)$.

由方程(4.1)变形得

$$Q(z)=-(\frac{f''}{f}+h(z)e^{P(z)}\frac{f'}{f}),$$

进而有

$$\left|\frac{f''}{f}\right|\leq|Q(z)|+\left|h(z)e^{P(z)}\right|\left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{4.3}$$

对 $Q(z)$应用引理 4.2.2 可知,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个线性测度和对数测度都为有穷的集合 $E_{1_0}\subset(0,+\infty)$,当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_{1_0}, r\to\infty$ 时,有

$$|Q(z)|\leq\exp\left\{r^{\sigma(Q)+\varepsilon}\right\}. \tag{4.4}$$

假设 $P(z)=az^n+\cdots$,其中 $a=|a|e^{i\theta}$.我们可推算

$$E=\{\varphi:\delta(P,\varphi)<0\}=\bigcup_{i=1}^{n}\left(\frac{(4i-3)\pi-2\theta}{2n},\frac{(4i-1)\pi-2\theta}{2n}\right).$$

对 $h(z)e^{P(z)}$ 应用引理 4.2.3,存在一个集合 $E_{2_0}\subset[0,2\pi)$, $mE_{2_0}=0$, $R_0>0$,使得

对所有的 $z=re^{i\varphi}$,$|z|=r>R_0$, $\varphi\in[0,2\pi)\setminus E_{2_0}$,有

$$\left|h(z)e^{P(z)}\right|<\exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\varphi)r^n\right\}. \tag{4.5}$$

由 Hadmard 分解定理知 $f(z)$可表示为 $f(z)=\dfrac{g(z)}{d(z)}$,其中 $g(z),d(z)$为整函数.

由 $\deg P<\sigma(Q)$,比较(4.1)的各项增长性,可知

$$\mu(g)=\mu(f)\geq\mu(Q). \tag{4.6}$$

因为 $f(z)$具有有限个极点,由引理 4.2.4,存在子集 $E_{3_0}\subset(1,\infty)$,其对数测度 $lmE_{3_0}<\infty$,当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_{3_0}$ 时

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n(1+o(1))(\ n\geq1\text{为整数}). \tag{4.7}$$

将(4.4),(4.5),(4.7)代入(4.3)式可知,取点 $z=re^{i\varphi}$ 满足 $|z|=r>R_0$, $|g(z)|=M(r,g)$,且 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_{1_0}\cup E_{3_0}$,$\varphi\in[0,2\pi)\setminus E_{2_0}$ 时,对任意的 $\varepsilon>0$,充分大的 r 有

$$\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|^2(1+o(1))\leq\exp\left\{r^{\sigma(Q)+\varepsilon}\right\}+\exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\varphi)r^n\right\}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|(1+o(1))$$

$$\leq\exp\left\{r^{\sigma(Q)+\varepsilon}\right\}\left|\frac{\nu_g(r)}{z}\right|(1+o(1)),$$

所以

$$|\nu_g(r)|\leq r\exp\left\{r^{\sigma(Q)+\varepsilon}\right\}(1+o(1)).$$

因而 $\mu_2(g)\leq\sigma(Q)$,结合 (4.6),所以 $\mu_2(f)\leq\sigma(Q)$.因此:$\sigma_2(f)\geq\sigma(Q)\geq\mu_2(f)$. 进一步,若 $\mu_2(f)=\sigma_2(f)$,则.定理得证.

参考文献

[1]Hayman W.K.Meromorphic function[M].Oxford:Clarendon Press,1964.

[2]杨乐.值分布论及其新研究[M] .北京:科学出版社,1982.

[3]Bank S., Laine I..On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire [J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1982, 273: 351-363.

[4]Bank S., Laine I..On the zeros of meromorphic solutions of second order linear differential equations [J]. Comment. Math. Helv, 1983, 58: 656-677.

[5]Langley J.. On complex oscillation and a problem of Ozawa [J]. Kodai Math.J,1986, 9(3): 430-439.

[6]Gundersen G.G.. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J].London Math. Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[7]Gundersen G.G.. Finite order solutions if second order linear differential equations [J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1988, 305: 415-429.

[8]高仕安,陈宗煊,陈特为.线性微分方程的复振荡理论[M].武汉:华中理工大学出版社,1988.

[9]陈宗煊.微分方程 $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$ 解的增长性[J].中国科学(A 辑),2001,31(9): 775-784.

[10]Chen Zongxuan. The growth of solutions of $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$ where the order $\sigma(f)=1$[J]. Sci. China Ser. A, 2002, 45(3): 290-300.

[11]Chen Zongxuan, Yang Chongjun. Some further results on the zeros and growth of entire solutions of second order differential equations [J]. Kodai Math. J., 1999, 22:273-285.

[12]Ederi.A.,Fuehs W.H.J..The deficiencies of meromorphic functions of order less than one [J].Duke.Math.J,1969,27:233-249.

[13]杨乐.亚纯函数的亏函数[J].中国科学,1981,4:396-404.

[14]杨乐.亚纯函数的拟亏值[J].数学学报,1984,27(2):249-256.

[15]杨乐.张广厚.一类整函数的亏值[J].中国科学,1977,4:289-300.

[16]伍胜健.关于整函数的 Borel 方向的分布[J].数学年刊,L4A:1992,4:400-406.

[17]Zheng Jianhua.On transcendental meromorphic functions with radially distributed values[J].Science in China Ser. A Math,2004,47(3):401-416.

[18]张庆德.关于亚纯函数的Nevanlinna方向与Borel方向[J].数学学报,1986,29(4): 550-554.

[19]Kinnunen L..Linear differential equations with solutions of finite iterated order[J]. South east Asian Bull. Math,1998,22 (4):385-405.

[20]Sato D..On the rate of growth of entire functions of fast growth[J].Bull. Amer. Math.Soc, 1963, 69:411-414.

[21] Chuang Chitai.On Borel directions of meromorphic functions of infinite order(II)[J].Bulletin of the Hongkong Mathematical Society,1999,2(2):305-323.

[22]Goldberg A. A.,Ostrovskii I.V..The distribution of values of meromorphic functio -n[M].(in Russian),Moscow,Izdat Nauk,1970.

[23]Nevanlinna R.Uber die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Wink- elraum[J].Acta Soc.sci.Fenn.1925,50:1-45.

[24]Wu Zhaojun.Radial oscillation of linear differential equation[J].Bull.Korean Math,2012,49(5):911-921.

[25]Chuang C.Sue les fonctions-types[J].Sci.Sinica,1961,10(1):171-181.

[26]Chen Zongxuan,Yang Chungchun.Quantitative estimations on zeros and growths of entire solutions of linear differential equations[J].Complex Variables and equat- ions,2000,42:119-133.

[27]李延玲,刘慧芳,冯斌.微分方程 $f''+A_1(z)e^{az^n}f'+A_0(z)e^{bz^n}f=F(z)$ 的复振荡[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2012,36(6):579-538.

[28]肖丽鹏,陈宗煊.一类高阶微分方程亚纯解的增长性[J].数学研究,2005,38(3):26 5-271.

[29]张菡之,陈宗煊.高阶非齐次方程解的性质[J].华南师范大学学报,2012,44(2):18

-20.

[30]易才凤.高阶微分方程解的辐角分布[J].数学学报,2005,48(1):133-140.

[31]Wu Zhaojun,Sun Daochun .Angular distribution of solutions of higher order linear differential equations ,J.Korean Math .Soc.2007,44(6):1329-1338.

[32]Zheng Jianhua.Value Distribution of Meromorphic Functions[M].Springer,Beijing :Tsinghua Univ. Press, 2010.

[33]Wu Shengjian.On the location of zeros of solution of $f'' + Af = 0$ where $A(z)$ is entire[J]. Math.Scand,1994,74 (2): 293-312.

[34]吴昭君,孙道椿.复振荡中的辐角分布[J].数学学报中文版,2007,50(6):1297-1304.

[35]Yi Caifeng,Liu Xuqiang,Xu Hongyan.On the growth of solutions of a class of second-order complex differential equations[J].Advances in Difference Equations, 2013:188.

[36]陈宗煊,二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点[J].1996,16(3):276-283.

[37]陈宗煊.慢增长系数齐次线性微分方程解的性质[J].江西师范大学学报,1999, 23(4):283- 288.

致谢

本论文的完成为我三年的研究生求学生涯划上了一个句号. 本论文从从选题构思到修改定稿, 都得到了我的导师易才凤教授悉心细致的教诲和无私的帮助, 谨此向易老师表示我由衷的感谢. 回首三年的求学历程, 对那些引导我、帮助我、激励我的人, 我心中充满了感激.

首先, 我要感谢我的导师易老师. 在刚开始接触所学专业知识时, 易老师用她渊博的知识悉心引导我们, 每每遇到有疑惑时, 总是激发我们思考, 耐心和我们一起讨论问题. 在后来的学习交流中, 易老师渊博的专业知识, 严谨的治学态度, 精益求精的工作作风, 诲人不倦的高尚师德, 严以律己、宽以待人的崇高风范, 朴实无华、平易近人的人格魅力更是对我影响深远. 易老师不仅在我的学业上对我倾注了大量心血, 对我的生活也十分关心. 感谢您在我陷入迷途的时候给我正确指引, 让我坚信未来的道路.

同时, 我要感谢从本科到研究生所有教导过我、关心过我的老师. 特别是给予我人生指导的大学辅导员王华平老师,研究生时期辅导员蒋新荣老师;给予过我鼓励帮助的杨金波副院长;给予我专业知识的涂金老师、罗南晨老师.谢谢你们对我的栽培.

在此,我还要感谢和我一起生活学习,陪我度过在江西师范大学七年校园生活的同学们.特别是,非常关爱我的学长学姐们,一起共同学习奋斗的同门们,同窗七年的数一班同学们,同寝七年感情深厚的室友.

最后,诚挚的感谢各位专家和教授,感谢你们在百忙之中参加论文的评阅和答辩.

攻读硕士学位期间完成的研究论文

[1] 胡军, 易才凤. 高阶非齐次线性微分方程解沿径向的振荡性质[J].江西师范大学学报(自然科学版),2014,38(2):162-166.

[2] 胡军, 易才凤. 复振荡中的辐角分布[J]. 已投稿

[3] 胡军, 易才凤. 一类二阶齐次线性微分方程解的超级[J]. 待发